**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**Fachrichtung 6.1 (Mathematik)**
**Prof. Dr. Mark Groves**
**MSc Jens Horn**

**Mathematik für Informatiker 2, SS 2018**
**Übungsblatt 9**

---

**1.** Für welche Werte von $\lambda$ und $\mu$ haben die folgenden reellen linearen Gleichungssysteme keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen? Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse geometrisch.

(a)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 5, \\ 3x - y + \lambda z &= 2, \\ x + 7y - 6z &= \mu \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 0, \\ 2x + 3y + z &= 1, \\ 4x + 7y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

**2.** Finden Sie alle reellen nichttrivialen Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 17x_2 - 5x_3 - 9x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie ferner, dass eine dieser Lösungen auch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1 &= 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

löst, aber keine sich als lineare Kombination der Vektoren $(0, 1, 2, 3)$ und $(3, 2, 1, 0)$ darstellen lässt.

**3.** Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1.$$

**4.** Es sei $K$ ein Körper.

(a) Zwei Matrizen in $A, B = K^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, falls es $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $B = P^{-1}AP$ gibt. Zeigen Sie:

(i) Ähnlichkeit von Matrizen definiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $K^{n\times n}$.

(ii) $A \sim B$ genau dann, wenn es einen endlichdimensionalen Vektorraum $V$ über $K$ mit Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ und eine lineare Abbildung $T : V \to V$ derart gibt, dass $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)$, $B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(T)$.

(b) Zeigen Sie, dass zwei ähnliche Matrizen dieselbe Determinante haben.

(c) Es sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über $K$. Wie würden Sie die Determinante einer linearen Abbildung $T : V \to V$ definieren?