UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 2, SS 2018
Übungsblatt 5

---

1. (a) Prüfen Sie, ob die Teilmengen

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}, \\
U_2 &= \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : p(0) = 1\}, \\
U_3 &= \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}, \\
U_4 &= \left\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}, \\
U_5 &= \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : p'(0) + p''(0) = 0\}, \\
U_6 &= \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : p'(0)p''(0) = 0\}
\end{aligned}$$

von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ Unterräume von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sind.

(b) Prüfen Sie, ob die Teilmengen

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = b \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + b = 1 \right\}, \quad S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a^2 = b^2 \right\}$$

von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ Unterräume von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sind.

2. (a) Zeigen Sie, dass $\{x^3 - x^2, x^3 - x\}$ eine Basis für den Unterraum

$$W = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p(1) = 0\}$$

von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ ist. Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis für $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ und finden Sie somit ein Komplement von W in $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) Sei S_3 die Menge aller reellen, symmetrischen Matrizen 3×3 Matrizen. Finden Sie eine Basis für den Unterraum S_3 von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ und bestimmen Sie somit $\dim S_3$. Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis für $\mathbb{R}^{3\times 3}$ und finden Sie somit ein Komplement von S_3 in $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

[Hinweis: Eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ heißt *symmetrisch*, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots n$ gilt.]

3. (a) Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V genau dann ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist.

(b) Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2$ ein Unterraum von V ist.