UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 1, WS 2017/18
Übungsblatt 9

---

1. (a) Finden Sie alle konvergenten Teilfolgen der Folge

$$1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots.$$

(b) Finden Sie alle konvergenten Teilfolgen der Folge

$$1, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots.$$

(c) Für welche reellen Zahlen α gibt es eine Teilfolge der Folge

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, \ldots,$$

die gegen α konvergiert?

2. (a) Leiten Sie die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

her. [Hinweis: Es gilt

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.]

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

konvergiert und bestimmen Sie ihre Summe.

3. Betrachten Sie die Folge $\{a_n\}$, wobei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Benutzen Sie die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^k \geq 1 + x, \qquad x \geq -1,\ k \in \mathbb{N},$$

um die Abschätzung

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

zu beweisen.

(c) Benutzen Sie die Binomialentwicklung

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j, \qquad |x| < 1,\ n \in \mathbb{N},$$

um die Abschätzung

$$a_n \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

zu beweisen.

[Hinweis: Es gilt

$$\frac{n!}{(n-j)!} \frac{1}{n^j} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n-j+1}{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $j = 0, 1, \ldots, n$.]

(d) Zeigen Sie, dass

$$a_n \leq 3, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

[Hinweis: Es gilt $2^{j-1} \leq j!$ für alle $j \in \mathbb{N}$.]

(e) Folgern Sie, dass $\{a_n\}$ gegen eine reelle Zahl im Intervall $(2, 3)$ konvergiert. (Diese Zahl heißt die *Eulersche Zahl* e.)