UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 1, WS 2018/19
Übungsblatt 7

---

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzips:

(a) Unter 7 ganzen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 6 teilbar ist.

(b) Es sei n eine natürliche Zahl. Unter beliebigen n^2+1 Punkten $P_1, \ldots, P_{n^2+1}$ in einem Quadrat der Kantenlänge n gibt es mindestens zwei Punkte mit Abstand $\leq \sqrt{2}$.

(c) Unter 51 ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 gibt es mindestens zwei, deren Summe gleich 101 ist.

2. Beweisen Sie, dass die Menge aller Primzahlen unendlich ist. [Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis, dass die Menge $\mathbb{N}$ unendlich ist. Sie dürfen annehmen, dass eine natürliche Zahl $m \geq 2$ entweder eine Primzahl oder durch eine Primzahl teilbar ist.]

3. (a) Beweisen Sie, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist. [Hinweis: Ordnen Sie die Teilmengen nach der Summe ihrer Elemente.]

(b) Es seien $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots$ abzählbar unendliche Mengen. Zeigen Sie, dass $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ebenfalls abzählbar unendlich ist. [Hinweis: Bezeichnen Sie die Elemente von A_i mit $\{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}, \ldots\}$ und verwenden Sie ein Diagonalargument, um die Elemente $\{a_{i,j}\}_{i,j=1,2,\ldots}$ von $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ abzuzählen.]

4. Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der Mengen

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \left\{ x \in \mathbb{Q} \ : \ \sqrt{3} < x \leq \sqrt{5} \right\}, \\
M_1 &= \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}, \\
M_2 &= \left\{ \frac{x}{x+1} \ : \ x \in \mathbb{R},\ x > 0 \right\}, \\
M_3 &= \left\{ \frac{x+1}{x} \ : \ x \in \mathbb{R},\ x > 0 \right\}
\end{aligned}
$$

und entscheiden Sie, ob es sich hierbei um ein Minimum bzw. Maximum handelt.