



Mathematik für Informatiker 1, WS 2017/18
 Übungsblatt 3

1. Für die Elemente von \mathbb{Z}_3 ergeben sich bezüglich der Addition \oplus und der Multiplikation \odot der Restklassenarithmetik die folgenden Verknüpfungstabellen:

\oplus	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

\odot	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

- (a) Bestimmen Sie diese Tabellen für die Elemente von \mathbb{Z}_5 und \mathbb{Z}_7 .
- (b) Bestimmen Sie diese Tabellen für die Elemente von \mathbb{Z}_4 und zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \odot)$ kein Körper ist.

2. Seien $n \geq 2$ und $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ ein Körper, wobei \oplus die Addition und \odot die Multiplikation der Restklassenarithmetik ist. Zeigen Sie, dass n eine Primzahl ist.

[Hinweis: Ist n keine Primzahl, so gibt es $a, b \in \{2, \dots, n-1\}$ mit $n = ab$. Was ist $[a] \odot [b]$?

3. Definieren Sie die Verknüpfungen 'Subtraktion' und 'Division' auf der Menge der reellen Zahlen. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $b, d \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} \Big/ \frac{d}{c} = \frac{ac}{bd},$$

indem Sie *nur die Axiome der Arithmetik und Ihre Definitionen* anwenden.

4. Bestimmen Sie die reellen Zahlen x , die die folgenden Ungleichungen lösen.

(a) $\frac{4x - 5}{x^2 - 1} < 5$

(d) $\left| \frac{(x-1)(2x-3)}{x(x-5)} \right| > 1$

(b) $\frac{5}{5x-1} < \frac{2}{2x+1}$

(e) $\log\left(\frac{2-x}{12+4x}\right) > 0$

(c) $\frac{3x+2}{2x+3} < \frac{x}{x+1}$

(f) $e^x > 3^{x^2}$

5. Skizzieren Sie die Teilmengen

$$A_1 = \left\{ (x, y) : 3x + 2y \leq 6, x - y \leq 2, x \leq 1 \right\},$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) : |y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, |y - \sqrt{5}x| \leq \sqrt{5}, |y + \sqrt{5}x| \leq \sqrt{5} \right\}$$

der (x, y) -Koordinatenebene.